เฉลยการบ้านครั้งที่ 11

10.3 ในการแก้ปัญหาข้อนี้เราต้องเริ่มจากเขียน function สำหรับ half wave rectifier

$$f(x) = \begin{cases} h\sin x; & 0 < x < \pi \\ 0; & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

จากรูปทั่วไปของ Fourier series $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

เมื่อ $\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$ และ $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$

จาก $\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} h\sin x\ dx = \frac{h}{\pi}$

สำหรับ a_n ; กรณีที่ *n = 1;*

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\sin x\cos x\,dx = \frac{h}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = 0 \quad ;$$

โดยอาศัย $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

กรณีที่ *n >1;*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\sin x\cos nx\,dx$$

โดยอาศัย $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$$a_n = \frac{h}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(1+n)x\,dx + \int_0^{\pi}\sin(1-n)\,x\,dx\right)$$

$$= \frac{h}{2\pi}\left(\frac{-\cos(1+n)x}{(1+n)}\bigg|_0^{\pi} + \frac{-\cos(1-n)x}{(1-n)}\bigg|_0^{\pi}\right)$$

$$\therefore\ a_n = \frac{h}{2\pi}\left(\frac{1-\cos(1+n)\pi}{(1+n)} + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{(1-n)}\right) \qquad (1)$$

สมการที่ *(1)* แสดงให้เห็นว่า *n* ที่เป็นเลขคี่ ทำให้ $a_n = 0$ ในขณะที่ *n* ที่เป็นเลขคู่ เช่น *2,4, 6, 8, …* ทำให้สมการที่ *1* เขียนได้เป็น

$$a_n = \frac{h}{\pi}\left(\frac{2}{1-n^2}\right) = -\frac{h}{\pi}\left(\frac{2}{n^2-1}\right) \qquad (2)$$

สำหรับ b_n ; กรณีที่ *n = 1;*

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\sin x\sin x\,dx = \frac{h}{\pi}\int_0^{\pi} sin^2\,xdx \quad ;$$

$$= \frac{h}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)dx = \frac{h}{2}$$

กรณีที่ n > 1;

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\sin x\sin nx\,nx\,dx$$

โดยอาศัย $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$$b_n = \frac{h}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos(1-n)x\,dx + \int_0^{\pi}\cos(1+n)\,x\,dx\right)$$

$$= \frac{h}{2\pi}\left(\frac{-\sin(1-n)x}{(1-n)}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{-\sin(1+n)x}{(1+n)}\Bigg|_0^{\pi}\right)$$

$$\therefore b_n = 0$$

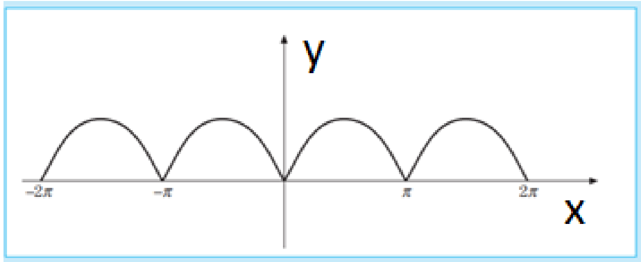
เราสามารถเขียน Fourier series ของ half wave rectifier ได้เป็น

$$y = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$= \frac{h}{\pi} - \frac{h}{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)\cos 2x - \frac{h}{\pi}\left(\frac{2}{15}\right)\cos 4x - \frac{h}{\pi}\left(\frac{2}{35}\right)\cos 6x - \cdots + \frac{h}{2}\sin x$$

$$y = \frac{h}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{1\cdot 2}\sin x - \left(\frac{2}{1\cdot 3}\right)\cos 2x - \left(\frac{2}{3\cdot 5}\right)\cos 4x - \left(\frac{2}{5\cdot 7}\right)\cos 6x - \ldots\right) \quad \# (3)$$

10.4 full-wave rectifier



http://williamsgj.people.cofc.edu/Fourier%20Series.pdf

ในการแก้ปัญหาข้อนี้เราต้องเริ่มจากเขียน function สำหรับ full wave rectifier

$$f(x) = \begin{cases} h\sin x; & 0 < x < \pi \\ -h\sin x; & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

จากรูปทั่วไปของ Fourier series $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

เมื่อ $\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$ และ $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$

จาก $\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} h\sin x\ dx - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} h\sin x\ dx = \frac{2h}{\pi}$

สำหรับ a_n ; กรณีที่ *n = 1;*

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\sin x\cos x\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} h\sin x\cos x\,dx$$

$= \frac{h}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx - \frac{h}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin 2x\,dx;$ โดยอาศัย $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$= 0$;

กรณีที่ *n >1;*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h\sin x\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} h\sin x\cos nx\,dx$$

โดยอาศัย $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$$a_n = \left(\frac{h}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(1+n)x\,dx + \int_0^{\pi}\sin(1-n)\,x\,dx\right)\right)$$

$$-\left(\frac{h}{2\pi}\left(\int_{\pi}^{2\pi}\sin(1+n)x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\sin(1-n)\,x\,dx\right)\right)$$

$$=\left(\frac{h}{2\pi}\left(\frac{-\cos(1+n)x}{(1+n)}\Big|_{0}^{\pi}+\frac{-\cos(1-n)x}{(1-n)}\Big|_{0}^{\pi}\right)\right)$$

$$-\left(\frac{h}{2\pi}\left(\frac{-\cos(1+n)x}{(1+n)}\Big|_{\pi}^{2\pi}+\frac{-\cos(1-n)x}{(1-n)}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)\right)$$

$$\therefore a_n=\left(\frac{h}{2\pi}\left(\frac{1-\cos(1+n)\pi}{(1+n)}+\frac{1-\cos(1-n)\pi}{(1-n)}\right)\right)$$

$$-\left(\frac{h}{2\pi}\left(\frac{-\cos(1+n)2\pi+\cos(1+n)\pi}{(1+n)}+\frac{-\cos(1-n)2\pi+\cos(1-n)\pi}{(1-n)}\right)\right) \qquad (4)$$

สมการที่ *(4)* แสดงให้เห็นว่า *n* ที่เป็นเลขคี่ ทำให้ $a_n=0$ ในขณะที่ *n* ที่เป็นเลขคู่ เช่น *2,4, 6, 8, …* ทำให้สมการที่ *4* เขียนได้เป็น

$$a_n=\frac{2h}{\pi}\left(\frac{2}{1-n^2}\right)=-\frac{2h}{\pi}\left(\frac{2}{n^2-1}\right) \qquad (5)$$

สำหรับ b_n ; กรณีที่ *n = 1;*

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h\sin x\sin x\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}h\sin x\sin x\,dx$$

$$=\frac{h}{\pi}\int_0^{\pi}sin^2\,xdx-\frac{h}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}sin^2\,xdx \quad ;$$

$$=\frac{h}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)dx-\frac{h}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)dx=0$$

ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่า เทอมที่เป็น first harmonic ไม่มีอีกต่อไปใน full wave rectifier เปรียบเทียบกับผลจาก half wave rectifier ที่มีเทอมของ first harmonic

กรณีที่ n > 1;

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h\sin x\sin nx\,nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}h\sin x\sin nx\,nx\,dx$$

โดยอาศัย $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$$b_n = \frac{h}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \cos(1-n)x\,dx + \int_0^{\pi} \cos(1+n)\,x\,dx\right)$$

$$-\frac{h}{2\pi}\left(\int_{\pi}^{2\pi} \cos(1-n)x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos(1+n)\,x\,dx\right)$$

$$= \frac{h}{2\pi}\left(\frac{-\sin(1-n)x}{(1-n)}\Big|_0^{\pi} + \frac{-\sin(1+n)x}{(1+n)}\Big|_0^{\pi}\right) - \frac{h}{2\pi}\left(\frac{-\sin(1-n)x}{(1-n)}\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{-\sin(1+n)x}{(1+n)}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$\therefore\ b_n = 0$$

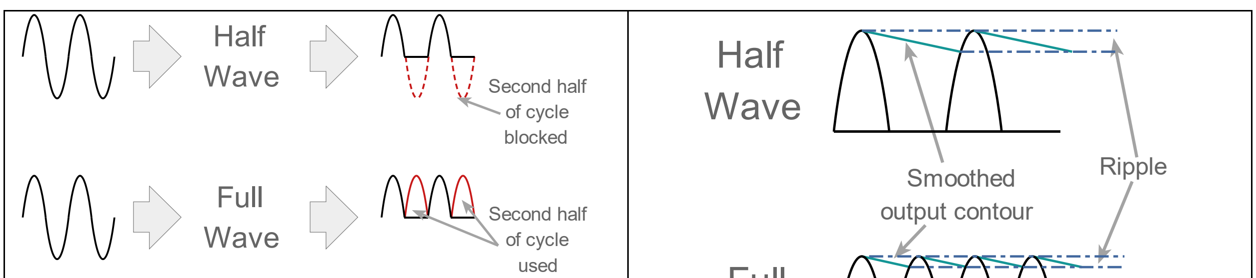
เราสามารถเขียน Fourier series ของ full wave rectifier ได้เป็น

$$y = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{2h}{\pi} - \frac{2h}{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)\cos 2x - \frac{2h}{\pi}\left(\frac{2}{15}\right)\cos 4x - \frac{2h}{\pi}\left(\frac{2}{35}\right)\cos 6x - \cdots$$

$$y = \frac{2h}{\pi}\left(1 - \left(\frac{2}{1\cdot 3}\right)\cos 2x - \left(\frac{2}{3\cdot 5}\right)\cos 4x - \left(\frac{2}{5\cdot 7}\right)\cos 6x - \ldots\right) \quad \#\ (6)$$

ผลลัพธ์จาก *full wave rectifier (*สมการที่ *(6))* แสดงให้เห็นว่า มีค่าเป็นสองเท่าของผลลัพธ์ที่ได้จาก ***half wave rectifier*** *(*สมการที่ *(3))* และ ***undesirable modulating ripple*** ของ ***first harmonic*** *($\frac{h}{2}\sin x$)* ที่มีใน ***half wave rectifier*** ก็ถูกกำจัดออกไปด้วย



Comparison between the half wave and full wave rectifier operation

Full wave rectifier enables better smoothing

https://www.electronics-notes.com/articles/analogue_circuits/diode-rectifiers/full-wave-rectifier-circuits.php